

Задача 1.2.4.

Текст задания

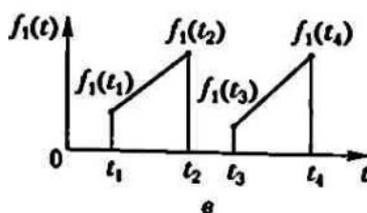
Найти $h_1(t)$, $h(t)$ и $h_2(t)$ для указанной реакции $f_2(t)$; построить графики $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Вычислить $f_2(t)$ для воздействия $f_1(t)$, заданного аналитически в вариантах задачи 1.2.4 и графически в виде импульса треугольной формы в соответствующих вариантах задачи 1.1.8.

Вариант 4

Цепь: 131 – ИТ $i_1 = f_1 = 9\exp(-2t)\delta_1(t)$; 213 – R_2 ; 312 – $L_3 = 6$; 423 – R_4 ; 523 – R_5 ; $R_4 = 2$; $f_2 = u_2$

4. Цепь: 131 – ИТ $i_1 = f_1 = 9\exp(-2t)\delta_1(t)$; 213 – R_2 ; 312 – $L_3 = 6$; 423 – R_4 ; 523 – R_5 ; $R_4 = 2$; $f_2 = u_2$.

Данные из задачи 1.1.8



$$i_1(0) = 4; i_1(1) = 0; i_1(2) = 4; i_1(3) = 4.$$

Решение

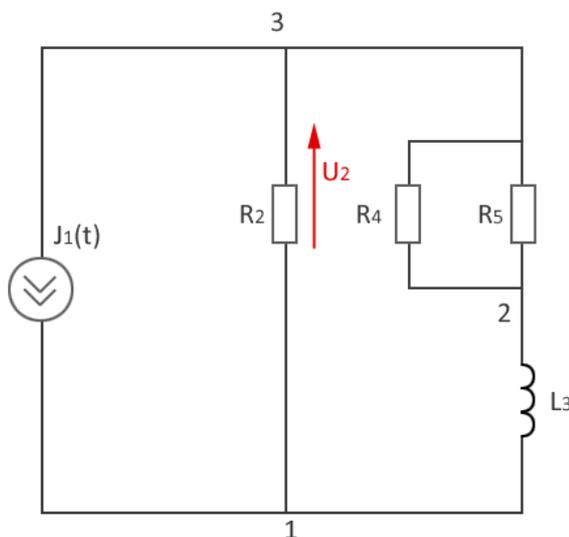


Рисунок 1. Расчетная схема цепи

Введём эквивалентное сопротивление для удобства записи:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \text{ Ом};$$

Переходная характеристика $h_1(t)$ — реакция на единичный ступенчатый импульс входного сигнала.

Характеристическое сопротивление можно определить приравняв входное сопротивление цепи в операторной записи после начала действия входного сигнала к нулю:

$$pL_3 + R_{45} + R_2 = 0; p = \frac{-R_2 + R_{45}}{L_3} = \frac{-2 + 1}{6} = -0,5 \text{ с}^{-1};$$

Установившееся значение искомой величины:

$$h_{1\text{ycm}} = 1 \cdot \frac{R_{45}}{R_2 + R_{45}} \cdot R_2 = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} = 0,667;$$

Независимое начальное условие:

$$i_L(0) = 0 \text{ А};$$

Зависимое начальное условие:

$$h_1(0) = 1;$$

Постоянная интегрирования:

$$h_1(0) = A + h_{1\text{ycm}}; A = h_1(0) - h_{1\text{ycm}} = 1 - 0,667 = 0,333;$$

Переходная характеристика:

$$h_1(t) = 0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5t};$$

Импульсная характеристика h :

$$h(t) = h_1'(t) + h_1(0) \cdot \delta(t) = \delta(t) - 0,167 \cdot e^{-0,5t};$$

Входное воздействие, заданное аналитически:

$$i_1(t) = 9 \cdot e^{-2t} \text{ нА } t \geq 0;$$

$$i_1'(t) = -18 \cdot e^{-2t} \text{ нА } t \geq 0;$$

Реакция цепи по интегралу Дюамеля:

$$u_2(t) = i_1(0) \cdot h_1(t) + \int_0^t i_1'(\tau) \cdot h_1(t - \tau) d\tau = \dot{i}$$

$$\dot{i} = 9 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5t}) + \int_0^t -18 \cdot e^{-2\tau} \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5(t-\tau)}) d\tau = \dot{i}$$

$$i_1 = 6 + 3e^{-0,5t} - \int_0^t (12e^{-2\tau} + 6e^{-0,5(t-\tau)} e^{-2\tau}) d\tau = i_2$$

$$i_1 = 6 + 3e^{-0,5t} + 6 \cdot (e^{-2t} - 1) - \int_0^t 6e^{-0,5t} e^{-1,5\tau} d\tau = i_2$$

$$i_1 = 3e^{-0,5t} + 6e^{-2t} + 4e^{-0,5t} \cdot (e^{-1,5t} - 1) = i_2$$

$$i_1 = 3e^{-0,5t} + 6e^{-2t} + 4e^{-2t} - 4e^{-0,5t} = 10e^{-2t} - e^{-0,5t};$$

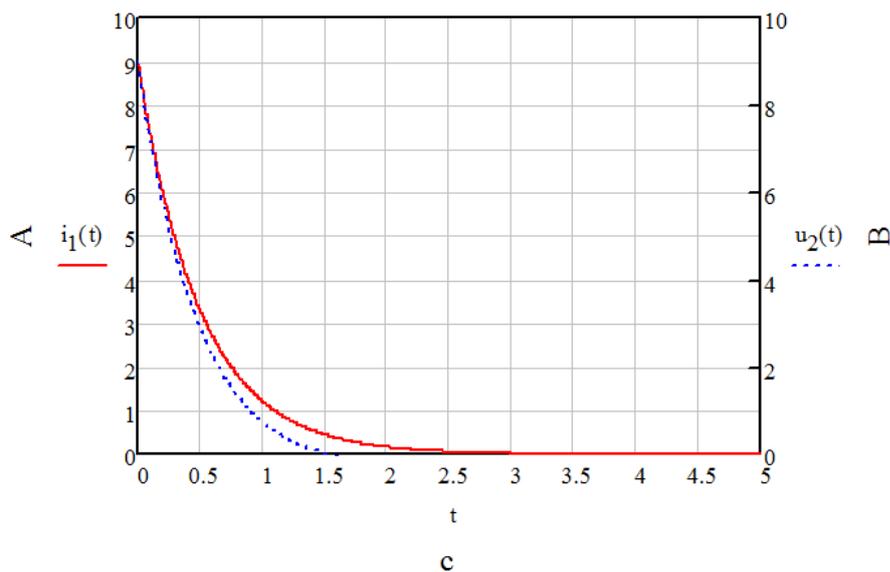
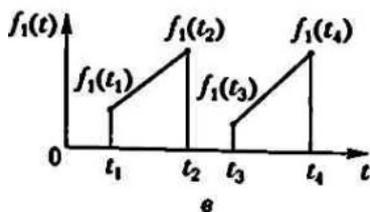


Рисунок 2. Входной и выходной сигнал цепи для источника тока заданного аналитически

Входное воздействие, заданное графически:



$$i_1(0) = 4; i_1(1) = 0; i_1(2) = 4; i_1(3) = 4.$$

Запишем указанный сигнал в аналитической форме:

$$i_1(t) = \begin{cases} 4 - 4 \cdot t & \text{при } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{при } 1 \leq t \leq 2 \\ 4 & \text{при } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{при } 3 \leq t \end{cases}$$

Производные входного сигнала в аналитической форме:

$$i_1(t) = \begin{cases} -4 \text{ нпу} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ нпу} & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 \text{ нпу} & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 \text{ нпу} & 3 \leq t \end{cases}$$

Реакция цепи по интегралу Дюамеля:

Для $0 \leq t \leq 1$:

$$u_2(t) = i_1(0) \cdot h_1(t) + \int_0^t i_1'(\tau) \cdot h_1(t-\tau) d\tau = \dot{i}$$

$$\dot{i} 4 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5t}) + \int_0^t -4 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5(t-\tau)}) d\tau = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 1,333 \cdot e^{-0,5t} - 2,667t - 0,333 \cdot e^{-0,5t} \int_0^t e^{0,5\tau} d\tau = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 1,333 \cdot e^{-0,5t} - 2,667t - 0,667 \cdot e^{-0,5t} \cdot (e^{0,5t} - 1) = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 1,333 \cdot e^{-0,5t} - 2,667t - 0,667 + 0,667 \cdot e^{-0,5t} = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 2 \cdot e^{-0,5t} - 2,667t - 0,667 ;$$

Для $1 \leq t \leq 2$:

$$u_2(t) = i_1(0) \cdot h_1(t) + \int_0^{t_1} i_1'(\tau) \cdot h_1(t-\tau) d\tau = \dot{i}$$

$$\dot{i} 4 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5t}) + \int_0^1 -4 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5(t-\tau)}) d\tau = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 1,333 \cdot e^{-0,5t} - 2,667 - 0,333 \cdot e^{-0,5t} \int_0^1 e^{0,5\tau} d\tau = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 1,333 \cdot e^{-0,5t} - 2,667 - 0,667 \cdot e^{-0,5t} \cdot (e^{0,5} - 1) = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 1,333 \cdot e^{-0,5t} - 2,667 - 1,1 \cdot e^{-0,5t} + 0,667 \cdot e^{-0,5t} = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 0,9 \cdot e^{-0,5t} - 2,667 ;$$

Для $2 \leq t \leq 3$:

$$u_2(t) = i_1(0) \cdot h_1(t) + \int_0^{t_1} i_1'(\tau) \cdot h_1(t-\tau) d\tau + \Delta i_1 \cdot h_1(t-t_2) = \dot{i}$$

$$\dot{i} 2,667 + 0,9 \cdot e^{-0,5t} - 2,667 + 4 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5(t-2)}) ;$$

Для $3 \leq t$:

$$u_2(t) = i_1(0) \cdot h_1(t) + \int_0^t i_1'(\tau) \cdot h_1(t-\tau) d\tau + \Delta i_1 \cdot h_1(t-t_2) - \Delta i_1 \cdot h_1(t-t_3) = i$$

$$i 2,667 + 0,9 \cdot e^{-0,5t} - 2,667 + 4 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5(t-2)}) - 4 \cdot (0,667 + 0,333 \cdot e^{-0,5(t-3)});$$

$$i_1(t) := \begin{cases} (4 - 4t) & \text{if } t \leq 1 \\ 0 & \text{if } 1 \leq t \leq 2 \\ 4 & \text{if } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u_2(t) := \begin{cases} 2.667 + 2e^{-0.5t} - 2.667t - 0.667 & \text{if } t \leq 1 \\ 2.667 + 0.9e^{-0.5t} - 2.667 & \text{if } 1 \leq t \leq 2 \\ 2.667 + 0.9e^{-0.5t} - 2.667 + 4 \cdot [0.667 + 0.333 \cdot e^{-0.5 \cdot (t-2)}] & \text{if } 2 < t \leq 3 \\ 2.667 + 0.9e^{-0.5t} - 2.667 + 4 \cdot [0.667 + 0.333 \cdot e^{-0.5 \cdot (t-2)}] - 4 \cdot [0.667 + 0.333 \cdot e^{-0.5 \cdot (t-3)}] & \text{otherwise} \end{cases}$$

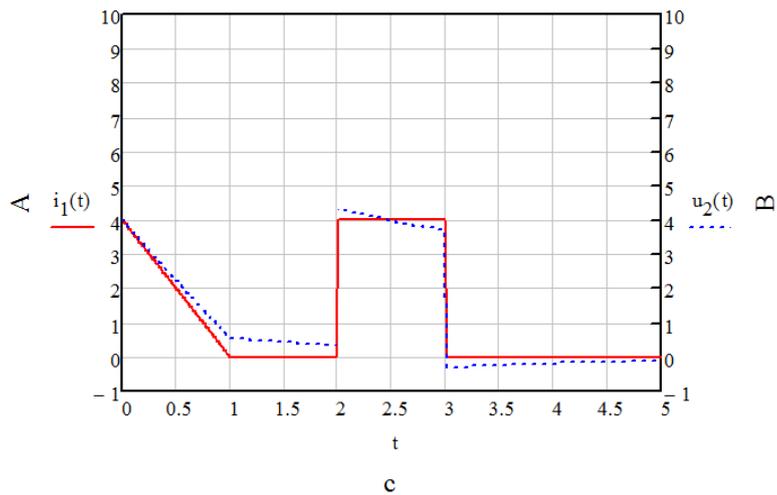


Рисунок 3. Входной и выходной сигнал цепи для источника тока заданного графически